


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Саратовский государственный
технический
университет имени Гагарина Ю.А.»
Профессионально-педагогический колледж



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ**

по дисциплине
ОП.01 «Математические методы решения прикладных профессиональных
задач»

направление подготовки
21.02.19 «Землеустройство»

Методические указания рассмотрены
на заседании цикловой методической
комиссии технических специальностей
Председатель ЦМК  Е.Э.Воеводина

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению лабораторных работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины ОП.01 «Математические методы решения прикладных профессиональных задач», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 21.02.19 «Землеустройство», соответствующих общих (ОК) и профессиональных (ПК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ПК 1.1. Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 1.2. Выполнять топографические съемки различных масштабов.

ПК 1.3. Выполнять графические работы по составлению картографических материалов

ПК 1.4. Выполнять кадастровые съемки и кадастровые работы по формированию земельных участков

ПК 1.5. Выполнять дешифрирование аэро- и космических снимков для получения информации об объектах недвижимости.

ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

ПК 2.1. Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости

ПК 2.2. Выполнять градостроительную оценку территории поселения

ПК 2.3. Составлять технический план объектов капитального строительства с применением аппаратно-программных средств

ПК 2.4. Вносить данные в реестры информационных систем различного назначения

ПК 3.1. Консультировать по вопросам регистрации прав на объекты недвижимости, и предоставления сведений, содержащихся в Едином государственном реестре недвижимости (ЕГРН)

ПК 3.2. Осуществлять документационное сопровождение в сфере кадастрового учета и (или) государственной регистрации прав на объекты недвижимости

ПК 3.3. Использовать информационную систему, предназначенную для ведения ЕГРН

ПК 3.4. Осуществлять сбор, систематизация и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости

ПК 4.1. Проводить проверки и обследования для обеспечения соблюдения требований законодательства Российской Федерации

ПК 4.2. Проводить количественный и качественный учет земель, принимать участие в их инвентаризации и мониторинге

ПК 4.3. Осуществлять контроль использования и охраны земельных ресурсов

ПК 4.4. Разрабатывать природоохранные мероприятия

При выполнении лабораторных работ студент должен *знать*:

- значение математики в профессиональной деятельности;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления

При выполнении лабораторных работ студент должен *уметь*:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Содержание лабораторных работ определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объем лабораторных работ по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность лабораторной работы – 2 академических часа. Перед проведением лабораторной работы преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению лабораторных работ по дисциплине ОП.01 «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» содержит 10 лабораторных работ.

**Перечень лабораторных работ
по дисциплине ОП.01 «Математические методы решения прикладных
профессиональных задач»**

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.

Тема: Вычисление определителей второго и третьего порядка

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.

Тема: Вычисление определителей второго и третьего порядка

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.

Тема: Нахождение параметров кривых второго порядка. Построение кривых второго порядка

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.

Тема: Изображение комплексных чисел на плоскости. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5.

Тема: Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6.

Тема: Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7.

Тема: Исследование функции на непрерывность. Определение точек разрыва функции и характера их разрыва

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8.

Тема: Решение прикладных задач с помощью производной

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9.

Тема: Решение прикладных задач с помощью производной

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10.

Тема: Решение прикладных задач с помощью интеграла

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.

Тема: Вычисление определителей второго и третьего порядка

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядка.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

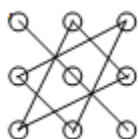
Справочный материал:

Определителем второго порядка называют число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определителем третьего порядка называют число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (3)$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Со знаком минус Со знаком плюс

Свойства определителей

Свойство 1. Определитель не изменится, если все строки заменить соответствующими столбцами и наоборот.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \Delta.$$

Свойство 2. При перестановке двух каких-либо строк или столбцов местами определитель изменяет знак.

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\Delta.$$

Свойство 3. Определитель равен нулю, если он имеет две равные строки (столбца).

Свойство 4. Множитель, общий для всех элементов строки или столбца, можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если к элементам какой-либо строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, то определитель не изменится.

Следствие из свойств 4 и 5: Если к элементам какой-либо строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на некоторое число, то определитель не изменится.

Содержание работы:

Задание 1. Вычислить определитель: а) по правилу треугольника б) по правилу Саррюса; в) методом разложения по элементам первой строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение:

а) $\Delta = (-4 + 6 - 6) - (-9 - 1 + 16) = -4 - 6 = -10;$

б) припишем два первых столбца и вычислим произведения из трех элементов по главной диагонали и параллельно к ней со знаком (+), а затем по побочной диагонали и параллельно к ней со знаком (-):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

получаем: $\Delta = -4 - 6 + 6 + 9 + 1 - 16 = -10$

в)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-4 + 1) - 2(8 + 3) + 3(2 + 3) = -3 - 22 + 15 = -10.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ двумя способами: с помощью разложения по первой строке и по правилу треугольника.

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(42 - 0) - 3(35 - 8) + 4(0 - 6) = 84 - 81 - 24 = -21.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \cdot 0 + 3 \cdot 8 \cdot 1 - 4 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 7 =$$

$$= 84 + 0 + 24 - 24 - 0 - 105 = -21.$$

О т в е т: -21.

$$\begin{vmatrix} 25 & 5 & -15 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Задание 3. Вычислить определитель, используя свойства:

$$\begin{vmatrix} 25 & 5 & -15 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -15 \cdot (6 + 4 - 10 + 9) = -15 \cdot 9 = -135$$

Задания для самостоятельного решения: Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 11 & -22 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 121 & 110 \\ 132 & 121 \end{vmatrix}$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 5 & 1 & -16 \\ -4 & -2 & 13 \\ 8 & -4 & -23 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & 22 \\ 4 & -11 & -3 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 1\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

Контрольные вопросы:

1. Дать определение определителя 2-го порядка.
2. Дать определение определителя 3-го порядка.
3. Чему равен определитель транспонированной матрицы?
4. Как изменится величина определителя, если в матрице поменять местами 2 строки (столбца)?
5. Можно ли вынести за знак определителя общий множитель строки или столбца?
6. Чему равен определитель, если все элементы некоторой строки (столбца) равны 0?
7. Чему равен определитель, если он имеет две одинаковых строки (столбца)?
8. Сформулируйте правило вычисления определителя 2-го порядка.
9. Сформулируйте правило вычисления определителя 3-го порядка.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.

Тема: Вычисление определителей второго и третьего порядка

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядка.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Задание 1. Вычислить определители

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad 7. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 9. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 10. \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 12. \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 13. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad 14. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 15. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad 17. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad 18. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 9 \end{vmatrix} \quad 19. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad 20. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad 22. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad 23. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} \quad 24. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \quad 25. \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 27. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 28. \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad 29. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad 31. \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 32. \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad 33. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.

Тема: Нахождение параметров кривых второго порядка. Построение кривых второго порядка

Цель работы: закрепить умения составлять уравнения прямых и кривых второго порядка

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Общее уравнение кривой второго порядка относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$

Существует 9 кривых второго порядка на плоскости.

Приведем канонические уравнения этих кривых ($a > 0, b > 0$).

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы

3) $y^2 = 2px$ - уравнение параболы

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - мнимый эллипс

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пара действительных пересекающихся прямых

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пара мнимых пересекающихся прямых

7) $x^2 = a^2$ - пара действительных параллельных прямых

8) $x^2 = -a^2$ - пара мнимых параллельных прямых

9) $x^2 = 0$ - пара действительных совпавших прямых.

Чтобы определить тип кривой второго порядка достаточно вычислить знаки некоторых выражений, составленных из коэффициентов уравнения.

Пусть кривая II порядка задана уравнением (1). Введем следующие обозначения

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Числа D и Δ не зависят от выбора системы координат на плоскости и называются инвариантами.

Содержание работы:

Задание 1. Определить тип уравнения кривой 2-го порядка:

$$2x^2 + 10xy + 12y^2 - 7x + 18y - 15 = 0.$$

Указание

Если $L1 \cdot L2 > 0$, то уравнение эллиптического типа;

Если $L1 \cdot L2 < 0$, то уравнение гиперболического типа;

Если $L1 \cdot L2 = 0$, то уравнение параболического типа.

Решение: Ответ на вопрос задачи зависит от знаков собственных чисел матрицы квадратичной формы их старших членов левой части уравнения:

Матрица квадратичной формы $2x^2 + 10xy + 12y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix},$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ 5 & 12 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 14\lambda - 1 = 0.$$

По теореме Виета $L1 \cdot L2 = -1 < 0$, следовательно, уравнение гиперболического типа.

Ответ: уравнение гиперболического типа.

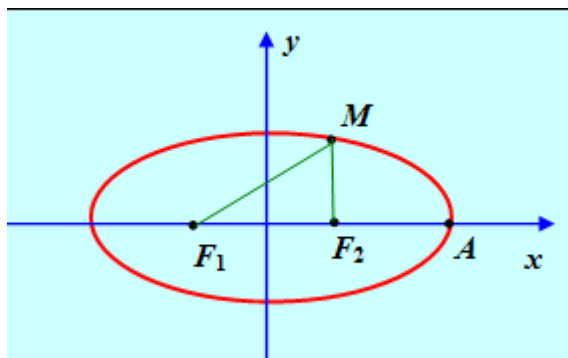
Задание 2. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки

$$M = \{2\sqrt{3}, \sqrt{6}\} \text{ и } A = \{6, 0\}.$$

Найти его эксцентриситет.

Указание: По условию задачи оси координат являются осями симметрии эллипса, поэтому, во-первых, его уравнение имеет канонический вид, а во-вторых, полуось А равна абсциссе точки А.

Решение:



По условию задачи оси координат являются осями симметрии эллипса, поэтому, во-первых, его уравнение имеет канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

А во-вторых, полуось А равна абсциссе точки А, т. е. $A = 6$. Найдем В, подставив в уравнение эллипса координаты точки М:

$$\frac{12}{36} + \frac{6}{b^2} = 1, \quad \frac{6}{b^2} = \frac{2}{3}, \quad b^2 = 9, \quad b = 3.$$

Итак, уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Тогда расстояние от фокуса до начала координат

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Вычислим эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: эксцентриситет

Задания для самостоятельного выполнения:

Построить кривые II порядка и определить их тип. Для эллипса найти координаты фокусов, эксцентриситет и фокальные радиусы. Для гиперболы найти координаты фокусов, эксцентриситет, фокальные радиусы и уравнения асимптоты. Для параболы найти координаты фокуса и фокальный радиус.

Вариант 1

а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1$ б) $x^2 - 2y^2 = 20$ в) $x^2 = -2y^2 - 4$

г) $\frac{x^2}{10} + y^2 = 0$ д) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$ е) $5y^2 = 0$
ж) $y^2 + 4x = 0$ з) $x^2 - 4 = 0$ и) $y^2 + 4 = 0$

к) $x^2 - 4x + 2 + y^2 + 2y = 12$

Вариант 2

а) $10x^2 + 9y^2 = 90$ б) $2y^2 - 4x^2 = 50$ в) $5x^2 + 10y^2 + 4 = 0$

г) $15x^2 + 60y^2 = 0$ д) $20x^2 = 5y^2$ е) $150x^2 = 0$

ж) $x^2 - 4y = 0$ з) $y^2 - 18 = 0$ и) $x^2 + 10 = 0$

к) $x^2 - 8x - y^2 + 2y - 85 = 0$

Вариант 3

а) $15x^2 = 30 - 10y^2$ б) $4x^2 - 10y^2 = 16$ в) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

г) $5x^2 + 10y^2 = 0$ д) $x^2 - y^2 = 0$ е) $10y^2 = 0$

ж) $y^2 - 10x = 0$ з) $y^2 - 16 = 0$ и) $y^2 + 16 = 0$

к) $x^2 + 4x + y^2 + 2y = 5$

Вариант 4

а) $15x^2 + 100y^2 = 12$ б) $12x^2 - 15y^2 = 60$ в) $x^2 + 15y^2 = -4$

г) $50x^2 + 60y^2 = 0$ д) $15x^2 - 60y^2 = 0$ е) $20x^2 = 0$

ж) $x^2 + 5y = 0$ з) $y^2 + 4 = 0$ и) $y^2 - 16 = 0$

к) $x^2 - 12x + y^2 = 50$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.

Тема: Изображение комплексных чисел на плоскости. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Цель работы: сформировать навыки работы с комплексными числами, производить действия над комплексными числами, изображать комплексные числа на плоскости.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

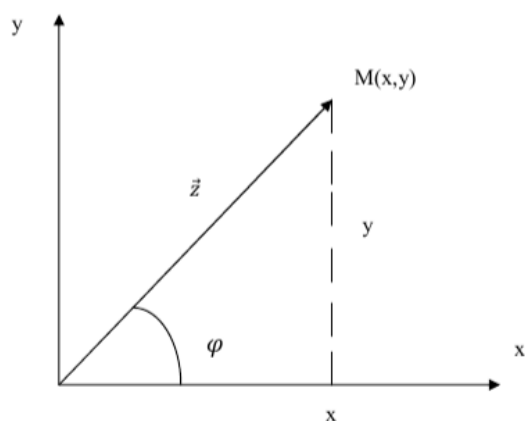
Справочный материал:

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y – действительные числа, $i^2 = -1$ – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Геометрическая интерпретация комплексного числа z

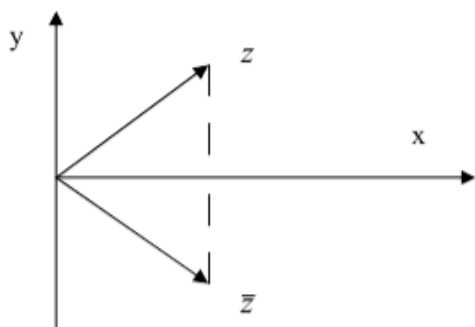
В прямоугольной системе координат на плоскости OXY числа z изображается

точкой $M(x, y)$ или её радиус-вектором $\vec{z} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (рис. 1).



Алгебраическая форма комплексного числа

$z = x + iy$, где $x = \operatorname{Re} z$ – вещественная часть числа, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая единица $i^2 = -1$ (рис. 2).



Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются комплексно-сопряженными и они отождествляются с точками (x, y) и $(x, -y)$, симметричными относительно оси OX .

Тригонометрическая форма комплексного числа

Длина вектора OM (рис. 1) называется модулем комплексного числа и

обозначается $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол φ между вектором OM и осью OX называется аргументом комплексного числа z . Угол φ определяется неоднозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k$.

Договоримся брать то значение φ , которое заключено между $-\pi$ и π , обозначать его $\arg Z$ и называть главным значением аргумента комплексного числа. Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (рис. 1), то $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, которое называют тригонометрической формой записи комплексного числа.

Показательная форма комплексного числа

Пользуясь формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, можно представить комплексное число в показательной форме

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$$

$$z = re^{i\varphi}$$

Содержание работы:

Задание 1. Нарисовать комплексные числа на комплексной плоскости.

- 1) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -4 + 2i$, $z_3 = 1 + 5i$;
- 2) $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 4 - 2i$, $z_3 = -1 + 5i$;
- 3) $z_1 = -7 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 6 + 2i$;
- 4) $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = -3 + 4i$, $z_3 = -6 + 2i$;
- 5) $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = -6 + i$, $z_3 = -2 - 4i$;
- 6) $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = -6 - i$, $z_3 = 2 - 4i$;
- 7) $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = -4 + 5i$;
- 8) $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = -1 - 3i$, $z_3 = -1 + 6i$;
- 9) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 5i$, $z_3 = -4 - i$;
- 10) $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 3 + 5i$, $z_3 = 4 - i$.

Задание 2. Выполнить действия: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$.

- 1) $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = -5 + 3i$, 2) $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 6 + 4i$,
- 3) $z_1 = 4 - i$, $z_2 = 3 + 2i$, 4) $z_1 = 5 - 6i$, $z_2 = -7 + 3i$;
- 5) $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 3 - \sqrt{3}i$, 6) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -7 + 6i$,
- 7) $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 4 + 7i$, 8) $z_1 = 3 + 7i$, $z_2 = 1 - 4i$;
- 9) $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 2 - 5i$, 10) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 - 4i$.

Задание 3. Возвести комплексное число в квадрат.

- 1) $z = -4 + 2i$, 2) $z = -2 - 4i$, 3) $z = 3 - 5i$;
- 4) $z = -1 + 5i$, 5) $z = -3 + 5i$, 6) $z = -1 + 2i$;
- 7) $z = 3 - 4i$, 8) $z = -4 + 5i$, 9) $z = 7 - 2i$;
- 10) $z = -1 + 6i$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5.

Тема: Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом

Цель работы: научиться решать квадратные уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом в поле комплексных чисел

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Пример 1. Решить уравнение $z^2 - (7 - 2i)z + 13(1 - i) = 0$.

Решение. Вычисляем дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = (7 - 2i)^2 - 4 \cdot 13(1 - i) = 49 - 28i - 4 - 52 + 52i = -7 + 24i.$$

Вычисляем корни из дискриминанта по формуле квадратных корней из комплексного числа:

$$\sqrt{-7 + 24i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} - 7}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} + 7}{2}} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{25 - 7}{2}} + i \sqrt{\frac{25 + 7}{2}} \right) = \pm(3 + 4i).$$

Вычисляем корни уравнения по формуле корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{(7 - 2i) \pm (3 + 4i)}{2} \quad \text{или} \quad z_1 = \frac{(7 - 2i) - (3 + 4i)}{2} = 2 - 3i; \quad z_2 = \frac{(7 - 2i) + (3 + 4i)}{2} = 5 + i.$$

Ответ: $z_1 = 2 - 3i; z_2 = 5 + i$.

Замечание. Аналогично решаются квадратные уравнения с действительными коэффициентами, но с отрицательным дискриминантом.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + 3x + 3 = 0$.

Решение. Вычислим дискриминант. $D = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3 < 0$. Отсюда следует, что действительных корней квадратное уравнение не имеет, но, согласно теореме, оно имеет два корня в поле комплексных чисел. Для вычисления корня из дискриминанта применяем следствие из предыдущего п.6, смотри там же пример. Получаем:

$\sqrt{D} = \sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot (\pm i) = \pm \sqrt{3} \cdot i$. Теперь подставляем в формулу корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-3 \pm i \sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

Ответ: $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$.

Содержание работы:

Задание 1. Решите квадратные уравнения:

- 1) $x^2 - 4x + 13 = 0$ 2) $8x^2 - 16x + 9 = 0$ 3) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
4) $4x^2 + 4x + 5 = 0$; 5) $x^2 - 14x + 74 = 0$

Задание 2. Решить квадратное уравнение.

- 1) $x^2 + 5x + 7 = 0$, 2) $x^2 + 4x + 9 = 0$, 3) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
4) $x^2 - 4x + 7 = 0$, 5) $x^2 + 4x + 5 = 0$, 6) $x^2 + 2x + 4 = 0$;
7) $x^2 + 3x + 6 = 0$, 8) $x^2 - 3x + 4 = 0$, 9) $x^2 - 2x + 8 = 0$; 10) $x^2 - 5x + 9 = 0$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6.

Тема: Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности.

Цель работы: научиться вычислять пределы функций в точке и на бесконечности

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Свойства пределов:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Число A является пределом функции $f(x)$ на бесконечности (в бесконечно удаленной точке), если для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое $M > 0$, что при $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Содержание работы:

Задание 1. Найти предел функции в точке $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-3}{3+7x}$.

Решение: В этом пределе в функцию $\frac{2x-3}{3+7x}$, стоящую под знаком предела

подставляем $x=3$ (т.к. $x \rightarrow 3$) и получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-3}{3+7x} = \frac{2 \cdot 3 - 3}{3 + 7 \cdot 3} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Задание 2. Найти пределы функций в точке

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} (4x + 6)(9 - 5x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4};$$

Задание 3. Найти предел функции в точке $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

Решение: В этом пределе подставим в функцию $\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ $x=1$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{\sqrt{1+3} - 2}{1-1} = \frac{2-2}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) - \text{получили неопределенность } \left(\frac{0}{0}\right).$$

Чтобы найти предел этой функции нужно ее преобразовать, обратив внимание, что в числителе данной функции стоит выражение, содержащее корень $\sqrt{x+3} - 2$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение противоположное (или сопряженное) данному. Это будет выражение $\sqrt{x+3} + 2$. Получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

Выражение, стоящее в числителе свернем по формуле разности квадратов $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

Сократим $x-1$ в числителе и знаменателе, и подставим $x=1$ в функцию, получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{1+3} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Задание 4. Найти пределы функций в точке

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x};$$

Задание 5. Найти предел функции на бесконечности $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

Решение: Если $x \rightarrow \infty$, то функция $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, тогда: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + 0) = 2$.

Задание 6. Найти пределы функций на бесконечности

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(13 - \frac{7}{x}\right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} - 3\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 5x + 3)$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7.

Тема: Исследование функции на непрерывность. Определение точек разрыва функции и характера их разрыва

Цель работы: сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, определять род точек разрыва.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Равенство из определения непрерывности функции означает выполнение трех условий:

- 1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;
- 2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$;
- 3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство из определения непрерывности функции.

Точка разрыва функции

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$ или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Точка разрыва функции		
первого рода		второго рода
если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$; $x \rightarrow x_0-0$ $x \rightarrow x_0+0$ при этом:		если по крайней мере один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ или $x \rightarrow x_0-0$ $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ не существует или равен бесконечности
если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, $x \rightarrow x_0-0$ $x \rightarrow x_0+0$ то x_0 – точка устранимого разрыва	если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, $x \rightarrow x_0-0$ $x \rightarrow x_0+0$ то x_0 – точка конечного разрыва. $ \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) $, $x \rightarrow x_0-0$ $x \rightarrow x_0+0$ скачок функции	

Содержание работы:

Задание 1. Найти точки разрыва функции, выяснить их типы. Для функции $f(x) = \begin{cases} x-3 \\ x-3 \end{cases}$, найти точки разрыва, выяснить их тип.

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=3$. Очевидно, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 3, \\ -1 \text{ при } x \leq 3. \end{cases}$ Значит, $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = -1$. Поэтому в точке $x=3$ функция имеет разрыв первого рода.

Скачок функции в этой точке равен $1 - (-1) = 2$.

Задание 2. Исследовать функции на непрерывность

$$y = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+3, & x > 1 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 2+3x, & -1 \leq x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$1. \quad y = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \leq x < 2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases} \quad 2. \quad y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 2^x, & 0 \leq x < 2 \\ 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$3. \quad y = \begin{cases} \frac{2}{x+2}, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2x}, & x > 2 \end{cases} \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2+1, & 0 \leq x < 3 \\ -x+3, & x \geq 3 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 2, & x \leq -2 \\ x^2, & -2 < x \leq 1 \\ -2x+3, & x > 1 \end{cases}$$

$$4. \quad y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2+1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8.

Тема: Решение прикладных задач с помощью производной

Цель работы: сформировать умения исследовать функции при помощи производной, применять производную при решении прикладных задач, задач на максимум и минимум

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Задание 1. Молодой предприниматель Михайлов Юрий в свете экономического кризиса решил выкупить нерентабельное провинциальное перерабатывающее предприятие и пригласил экономиста Гульдерова Германа помочь с расчетами по оптимизации расходов. Одна из задач поставленных перед Германом была следующая: найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Решение.

1 этап. Составление математической модели.

Составление модели облегчается тем, что известна форма банки и оговорено, что она должна быть заданной емкости. Это существенно для составления модели. Существенным является также требование, чтобы расход жести на изготовление банки был минимальным. Это требование означает, что площадь полной поверхности банки, имеющей форму цилиндра, должна быть наименьшей; существенны и размеры банки. Несущественны для составления математической модели конкретное (численное) значение емкости банки и вид консервов (мясных, овощных), для которых банка предназначена.

Обозначив емкость банки через V см³, сформулируем задачу: Определить размеры цилиндра с объемом V см³ так, что бы площадь его полной поверхности была наименьшей.

Для решения задачи обозначим радиус основания цилиндра через x , а высоту его через h (все измерения в сантиметрах). Тогда объем цилиндра

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Полная поверхность цилиндра:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

$$\text{Итак, } S(x) = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

Так как переменная x может принимать только положительные значения, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения $S(x)$ на $(0; \infty)$.

2 этап. Работа с составленной моделью.

Найдем производную $S'(x)$:



$$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3 + 2V}{x} \right)' = \left(\frac{6\pi x^2 x - (2\pi x^3 + 2V)}{x^2} \right) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Для нахождения критических точек решим уравнение $S'(x) = 0$.

Корень уравнения: $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

При $x < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $S'(x) < 0$, а при $x > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $S'(x) > 0$.

Следовательно, в точке $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $S(x)$ имеет минимум.

X	$(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \infty)$
S'	-	0	+
S		min	

Следовательно, функция в этой точке достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объем

V , будет наименьшей при $h = 2x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, т.е. когда цилиндр равносторонний.

3 этап. Ответ на вопрос задачи.

Наименьший расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет достигнут при условии, что диаметр основания и высота банки равны между собой.

Задание 2. Гарданов Марсель решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Сабирову Денису шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 X 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

Задание 3. Из куска железа в форме прямоугольного треугольника с катетами 2 м и 4м необходимо вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетам треугольника.

Задание 4. Разрежьте отрезок длиной 18 см на две части так, чтобы приняв их за катеты, получить прямоугольный треугольник с наименьшей гипотенузой.

Задание 5. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9.

Тема: Решение прикладных задач с помощью производной

Цель работы: сформировать умения исследовать функции при помощи производной, применять производную при решении прикладных задач, задач на максимум и минимум

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Вариант 1

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу: Точка движется так, что путь S в метрах, пройденный ею

за промежуток времени t в секундах, выражается формулой
$$S = x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$$
.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.
2. Вычислить скорость точки в момент $t = 3$ с.
3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
4. Вычислить ускорение точки в момент $t = 4$ с.

2. Используя геометрический смысл производной решить задачу: Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

3. Найти точки перегиба функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 3$.

Вариант 2

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу: Точка движется так, что путь S в метрах, пройденный ею

за промежуток времени t в секундах, выражается формулой
$$S = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + x$$
.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.
2. Вычислить скорость точки в момент $t = 3$ с.
3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
4. Вычислить ускорение точки в момент $t = 4$ с.

2. Используя геометрический смысл производной решить задачу: Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

3. Найти точки перегиба функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 6$.

Вариант 3

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу: Точка движется так, что путь S в метрах, пройденный ею

за промежуток времени t в секундах, выражается формулой
$$S = 0,4x^4 + x^2 + 0,7x$$
.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.
2. Вычислить скорость точки в момент $t = 3$ с.
3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
4. Вычислить ускорение точки в момент $t = 4$ с.

2.Используя геометрический смысл производной решить задачу: Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

3.Найти точки перегиба функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2$.

Вариант 4

1.Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу: Точка движется так, что путь S в метрах, пройденный ею

за промежуток времени t в секундах, выражается формулой $S = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.

2. Вычислить скорость точки в момент $t = 3$ с.

3. Найти ускорение точки в любой момент времени.

4. Вычислить ускорение точки в момент $t = 4$ с.

2.Используя геометрический смысл производной решить задачу: Найдите

угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

3.Найти точки перегиба функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 3$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10.

Тема: Решение прикладных задач с помощью интеграла

Цель работы: уметь применять определенный интеграл к решению задач прикладного характера

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Задача о вычислении пути

Согласно физическому смыслу первой производной, производная

функции в точке есть мгновенная скорость точки, т.е. $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$.
Отсюда, $ds = v(t)dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до

t_2 получаем
$$\int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Тогда путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$ выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \quad (1)$$

Пример 1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение.

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2)dt = (t^2 + t^3) \Big|_0^5 = 150 \text{ (м)}.$$

Пример 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1 = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе – со скоростью $v_2 = (4t + 5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = (2t^3 + t^2) \Big|_0^5 = 275 \text{ (м)}$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = (2t^2 + 5t) \Big|_0^5 = 75 \text{ (м)}$$

Таким образом, $S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200$ (м).

2. Задача о вычислении работы переменной силы

Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постоянна, а пройденный путь равен s , то как известно из курса физики, работа A этой F вычисляется по формуле: $A = F \cdot s$

Работу переменной силы $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x=a$ до $x=b$, находим по формуле (3):

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Решение задач на вычисление работы силы упругости, связанных с растяжением и сжатием пружин, основывается на законе Гука. По закону Гука сила F , растягивающая или сжимающая пружину, пропорциональна этому растяжению или сжатию, т.е. $F=kx$, где x – величина растяжения или сжатия, k – коэффициент пропорциональности.

Пример 1. Сила упругости F пружины, растянутой на $l^1 = 0,05$ м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на $l_2 = 0,1$ м?

Решение. Подставив данные в формулу закона Гука, получим: $3=k \cdot 0,05$, т.е. $k=60$, следовательно, сила упругости выражается соотношением $F=60x$. Найдем работу переменной силы по формуле (2), полагая, что $a=0$; $b=0,1$:

$$A = \int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,3 \text{ Дж}$$

3. Задача о силе давления жидкости

Согласно закону Паскаля величина P давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле $P=gh\rho S$, (4)

Где g – ускорение свободного падения в м/с^2 ;

ρ – плотность жидкости в кг/м^3 ;

h – глубина погружения площадки в м;

S – площадь площадки в м^2 .

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$.

Для решения задачи разобьем пластину на n частей (малых горизонтальных полосок) прямыми, параллельными поверхности жидкости (т.е. параллельными оси OY). На глубине x выделим одну из них и обозначим через $f(x)$ ее длину, а через Δx ее ширину. Приняв полоску за прямоугольник, находим ее площадь $S = f(x) \cdot \Delta x$.

$$P = g\rho f(x) \cdot \Delta x \cdot x$$

Найдем дифференциал dp этой функции.

$$dp = g\rho f(x) \cdot x dx$$

Тогда по закону Паскаля интегрируя полученное равенство в пределах от

$$x = a \text{ до } x = b, \text{ получим } P = g \int_a^b x f(x) dx \quad (3)$$

Пример. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой $0,4 \text{ м} \times 0,7 \text{ м}$.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы оси Oy и Ox соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой (3). Стенка имеет форму прямоугольника,

поэтому $f(x)=0,7x$, $x \in [0;0,4]$. Так как пределы интегрирования $a=0$ и $b=0,4$, то получим:

$$P=g \int_0^{0,4} 1000 * 0,7 * x dx = 700 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{0,4} = 56g \approx 549 \text{ Н}$$

Содержание работы:

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 9t^2 - 2t - 8$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 3 секунды от начала движения.
2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1 = (2t^2 + 4t)$ м/с, м/с, второе – со скоростью $v_2 = (3t + 2)$ м/с, м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 с?
3. Силу упругости F пружины, растянутой $l_1 = 0,02$ м, равна 2Н. Какую работу надо провести, чтобы растянуть пружину на $l_2 = 0,05$ м?
4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для ее сжатия на 0,01 нужна сила 10 Н
5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 - а) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = x - 4$;
 - б) $y = x^2 - 4$, $y = -(x + 2)^2$;
 - в) $y = \sqrt{x} + 1$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$

Информационное обеспечение обучения по дисциплине

Печатные издания:

Основные учебные издания:

1. Березина, Н. А. Высшая математика: учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Саратов: Научная книга, 2019. — 158 с. — ISBN 978-5-9758-1888-1. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/80978>
2. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики: учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. — Москва: КноРус, 2021. — 363 с. — ISBN 978- 5-406-08264-5. — URL: <https://book.ru/book/939287>
3. Фоминых, Е. И. Математика. Практикум: учебное пособие / Е. И. Фоминых. — 2-е изд. — Минск: Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2019. — 440 с. — ISBN 978-985-503-936-6. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/94307>

Дополнительные учебные издания:

4. Аналитическая геометрия: практикум для СПО / О. Н. Казакова, О. Н. Конюченко, Т. А. Фомина, С. В. Харитонова. — Саратов Профобразование, 2020. - 116 с. — ISBN 978-5-4488-0577-6. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92122>

Электронно-библиотечная система:

- 5.ЭБС «elibrary», ООО «РУНЭБ»
- 6.ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»
- 7.ЭБС «Лань», ООО «Издательство Лань»
- 8.ЭБС «PROФобразование»
- 9.ЭБС «Book.ru»